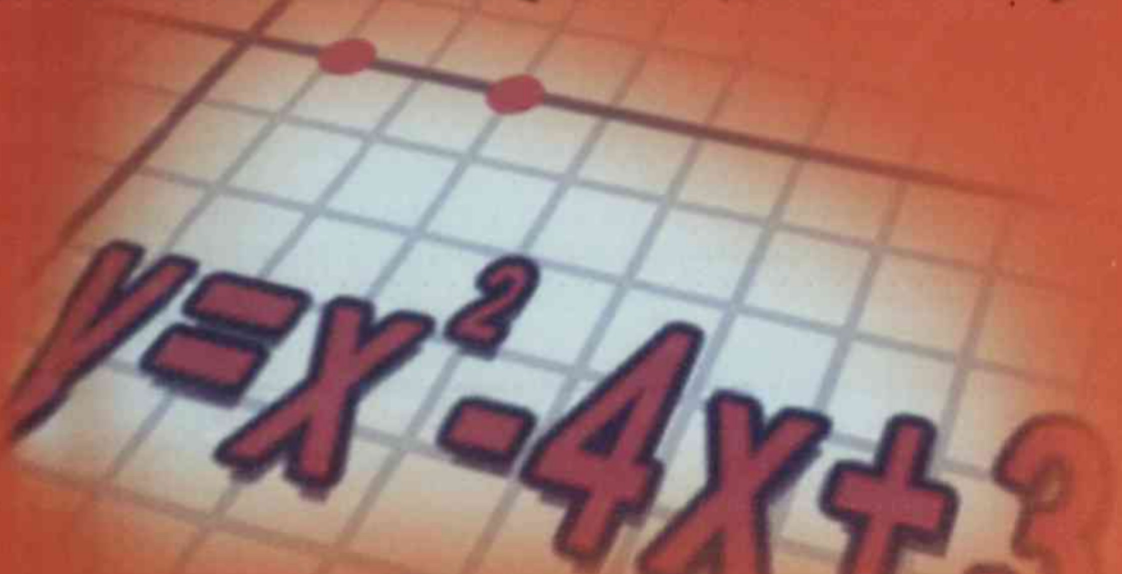
NGUYỄN HUY HOÀNG

TOÁN CAO CẤP

TẬP HAI

Giải tích toán học

(DÙNG CHO SINH VIÊN
CÁC NGÀNH KINH TẾ VÀ QUẢN TRỊ KINH DOANH)



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NGUYỄN HUY HOÀNG

TOÁN CAO CẤP

Tập hai: GIẢI TÍCH TOÁN HỌC

(DÙNG CHO SINH VIÊN CÁC NGÀNH KINH TẾ VÀ QUẢN TRỊ KINH DOANH)

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Các bạn đang có trong tay cuốn sách **"Toán cao cấp"** – dành cho kinh tế. Đối tượng phục vụ của cuốn sách là sinh viên các ngành kinh tế và quản trị kinh doanh, những người sử dụng toán học như là "phương tiện" để tìm hiểu và phân tích các vấn đề của kinh tế và quản trị kinh doanh. Với mục đích như vậy nên chúng tôi không đi sâu vào việc trình bày các chứng minh mà tập trung vào việc giới thiệu ý nghĩa của các khái niệm và các kết quả liên quan đến việc tìm hiểu và phân tích vấn đề kinh tế. Tuy nhiên, chúng tôi cũng rất chú trọng việc đảm bảo tính logic của toán học và rèn luyện các kỹ năng "thực hành" để giải các ví dụ, bài tập cụ thể.

Nội dung cuốn sách được trình bày thành hai tập. Tập một: **Đại số tuyến tính** và Tập hai: **Giải tích toán học**.

Sau khi trình bày các khái niệm và kết quả cơ bản, chúng tôi giới thiệu các ví dụ áp dụng "phương tiện" Toán học vào việc giải quyết một số vấn đề hoặc mô hình kinh tế đơn giản (lưu ý rằng, sinh viên năm thứ nhất học môn Toán cao cấp trong khi chưa được trang bị kiến thức về kinh tế và quản trị kinh doanh, đây là thách thức cho cả người dạy và người học).

Lần đầu tiên biên soạn cuốn sách theo hướng tiếp cận "Toán dành cho kinh tế" chắc chắn không thể tránh khỏi khiếm khuyết, rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc để cuốn sách ngày càng được hoàn thiện hơn.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về:

Địa chỉ email: hoangtoancb@neu.edu.vn

Tác giả

Nguyễn Huy Hoàng

Chương 1

PHÉP TOÁN VI PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN

§1. HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

– Các đại lượng biến thiên nhận giá trị bằng các số thực, thường được ký hiệu bởi các chữ cái thường như x, y, z,... được gọi là các biến số.

– Tập tất cả các giá trị mà biến nhận, được gọi là *Miền biến thiên* hay *Tập xác định* của biến số đó. Người ta thường ký hiệu Tập xác định bởi các chữ cái in hoa như X, Y, Z,... dễ nhận thấy X, Y, Z,... là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$.

– Cho x và y là hai biến số, nếu có một quy luật f cho tương ứng mỗi giá trị của biến số $x \in X$ với một giá trị *xác định* và *duy nhất* của biến số $y \in Y$, thì f được gọi là một hàm số xác định ở trên X, lấy giá trị ở trên Y và viết là $y = f(x)$. Hay ta còn nói f là một hàm số đi từ X đến Y. Khi đó, x gọi là đối số hay biến số độc lập, y gọi là hàm số hay biến số phụ thuộc. Tập X được gọi là tập xác định của hàm số và ký hiệu là D_f. Nó thường là một khoảng hay đoạn số thực.

– Tập $f(X) = \{y = f(x) \in Y \mid x \in D_f\} \subseteq Y \subset \mathbb{R}$, được gọi là tập giá trị của hàm số và ký hiệu là W_f.

– Tập $G_f = \{M(x, y) \mid y = f(x),\ x \in D_f\}$, gọi là đồ thị của hàm số f(x). Nó thường là một đường thẳng hoặc đường cong trong mặt phẳng.

Chú ý:

Khi cho hàm số, thường người ta chưa cho trước tập xác định, khi đó tập xác định của hàm số f(x) được hiểu như sau:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ có nghĩa}\}$$

và gọi là tập xác định tự nhiên của hàm số f(x).

Ví dụ:

– Cho hàm số: $y = f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

Tập xác định tự nhiên của nó là: $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

– Bạn đọc có thể tự tìm tập xác định của hàm số:

$$y = g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

1.2. PHÉP HỢP HÀM

Giả sử có hai hàm số $X \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} Y$, trong đó hàm $u = f(x)$ xác định trong miền X và nhận giá trị trong miền U, hàm $y = g(u)$ xác định trong miền U và nhận giá trị trong miền Z.

Khi đó hàm số cho tương ứng mỗi giá trị x thuộc miền X với một và chỉ một giá trị y theo quy luật: $y = g(u) = g[f(x)]$ được gọi là hàm số hợp của hai hàm số $y = g(u)$ và $u = f(x)$.

Ví dụ:

– Cho hàm số $y = (3x+2)^4$, ta hiểu hàm số này là hợp của hai hàm số $y = u^4$ và $u = (3x+2)$.

– Cho hàm số $f(x) = x^3$, $g(x) = 3^x$ khi đó chúng ta có:

$$f[g(x)] = (g(x))^3 = (3^x)^3 = 27^x$$

$$g[f(x)] = 3^{f(x)} = 3^{x^3}$$

– Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng: $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Đặt $u = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{u}$, khi đó:

$$f(u) = \frac{\dfrac{1}{u} - 1}{\dfrac{1}{u} + 1} = \frac{1-u}{1+u}.$$

vậy: $$f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

1.3. HÀM SỐ NGƯỢC

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên X và nhận giá trị trên Y. Nếu với mọi $y_0 \in Y$ đều tồn tại duy nhất $x_0 = g(y_0) \in X$ thì g được gọi là *hàm ngược* của hàm số $f(x)$.

Ký hiệu: $$x = f^{-1}(y).$$

Theo thói quen sử dụng ký hiệu hàm số chúng ta thường viết:

$$y = f^{-1}(x).$$

Ví dụ:

Ta nói $y = \sqrt[3]{x}$ là hàm số ngược của hàm số $y = x^3$ trên $\mathbb{R}$.

Chú ý: Với ký hiệu hàm ngược $y = f^{-1}(x)$, chúng ta đã đổi vai trò của x và y. Vì các cặp điểm (a,b) và (b,a) đối xứng nhau qua đường y = x nên đồ thị của hai hàm số ngược nhau $y = f(x)$ và $y = f^{-1}(x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

1.4. MỘT SỐ HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

1.4.1. Hàm lũy thừa

$$y = x^{\alpha} \ (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$

Với mỗi giá trị α cụ thể, chúng ta có hàm số cụ thể và khi đó mới tìm được tập xác định cho từng trường hợp.

Ví dụ:

- $\alpha = 1,\ y = x \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$
- $\alpha = -1,\ y = x^{-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\alpha = \frac{1}{2},\ y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \Rightarrow D_f = [0; +\infty)$

1.4.2. Hàm số mũ

$$y = a^x,\ (0 < a \neq 1); \qquad D_f = \mathbb{R}$$

Vì $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên tập giá trị $W_f = (0; +\infty)$.

Quy ước: $a^0 = 1$.

Nếu $a = e$, $(e \approx 2,718...)$, chúng ta có hàm số $y = e^x$.

1.4.3. Hàm số Lôgarit

$$y = \log_a x \ (0 < a \neq 1)$$
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} = (0; +\infty)$$
$$W_f = \mathbb{R}$$

Chú ý:

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a X^\alpha = \alpha . \log_a X \ (X > 0);$$
$$\log_a (XY) = \log_a X + \log_a Y \quad (X > 0,\ Y > 0)$$

– Nếu $a = 10$, thì ta viết $\log_{10} x = \lg x$ (lôgarit thập phân)

– Nếu $a = e$, thì ta viết $\log_e x = \ln x$ (lôgarit tự nhiên)

1.4.4. Các hàm số lượng giác

$$y = \sin x$$
$$D_f = \mathbb{R}$$
$$W_f = [0; 1]$$
$$y = \cos x$$
$$D_f = \mathbb{R}$$
$$W_f = [0; 1]$$
$$y = \mathrm{tg} x$$
$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k = o, \pm 1, \pm 2, ... \right\}$$
$$y = \mathrm{cotg} x$$
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi,\ k = o, \pm 1, \pm 2, ...\}$$